## Početní část 1 - 21.6.2021

1. Jde o lineární ODR s konstantními koeficienty, takže její obecné řešení bude tvaru $y = y_H + y_P$. Nejprve určíme řešení homogenní soustavy $y_H$: charakteristický polynom rovnice je $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ s dvojnásobným kořenem 2, takže fundamentální systém je $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$ a $y_H = d_1e^{2x} + d_2xe^{2x}$ pro $d_1, d_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

   Dále hledáme partikulární řešení $y_P$. Pravá strana rovnice není speciálního tvaru, proto použijeme variaci konstant, tj. hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_P = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ pro zatím neznámé funkce $c_1, c_2$. Na ty klademe dodatečné podmínky

$$c_1' \cdot e^{2x} + c_2' \cdot xe^{2x} = 0 \tag{1}$$
$$2c_1' \cdot e^{2x} + c_2' \cdot (1+2x)e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{1+x^2} \tag{2}$$

   Nabízí se odečíst dvojnásobek (1) od (2), čímž dostaneme

$$\begin{aligned} c_2' \cdot e^{2x} &= \frac{2e^{2x}}{1+x^2} \\ c_2' &= \frac{2}{1+x^2} \\ c_2 &= 2\operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

   Dosazením za $c_2'$ do (1) dále dostáváme

$$\begin{aligned} c_1' \cdot e^{2x} + \frac{2}{1+x^2}xe^{2x} &= 0 \\ c_1' &= \frac{-2x}{1+x^2} \\ c_1 &= -\ln\left(1+x^2\right) \end{aligned}$$

   Obecné řešení rovnice tedy je

$$\boxed{y = d_1e^{2x} + d_2xe^{2x} - \ln\left(1+x^2\right) \cdot e^x + 2\operatorname{arctg} x \cdot x \cdot e^{2x}},\ d_1, d_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

2. Pro $\alpha \neq 0$ platí

$$s(\alpha) = (\alpha^4 + 2\alpha^2)\, F\left(\frac{1}{\alpha^2+1}\right) - 2\, G\left(\frac{1}{\alpha^2+1}\right),$$

kde

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}, \quad |z| < 1$$

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}. \quad |z| < 1$$

Zpětným dosazením dostaneme, že

$$s(\alpha) = (\alpha^4 + 2\alpha^2)\, \frac{\alpha^2+1}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^2} = \alpha^2 + 3, \quad \alpha \neq 0.$$

V bodě $\alpha = 0$ však

$$s(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2) = -\infty.$$

Výsledkem je tedy

$$s(\alpha) = \begin{cases} \alpha^2 + 3, & \alpha \neq 0 \\ -\infty. & \alpha = 0 \end{cases}$$

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:
Všimneme si, že se jedná o teleskopickou řadu

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(1+\alpha^2)^{n-2}} - \frac{n+2}{(1+\alpha^2)^n}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^{-1}} + \frac{2}{(1+\alpha^2)^0} - \frac{n+1}{(1+\alpha^2)^{n-1}} - \frac{n+2}{(1+\alpha^2)^n}\right) \\ &= \begin{cases} \alpha^2 + 3, & \alpha \neq 0 \\ -\infty. & \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$